

LAHENDUSED 11.klass

1. *Vastus:* $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $x_3 = -1 + \sqrt{6}$ ja $x_4 = -1 - \sqrt{6}$.

Lahendus.
$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$$

Teeme muutujavahetuse $\frac{x}{x^2 + x - 5} = t$. Saame võrrandi:

$$\frac{1}{t} + 3t + 4 = 0,$$

millest

$$\frac{1}{t} + 3t + 4 = 0 \quad | \cdot t$$

$$3t^2 + 4t + 1 = 0$$

Lahendame ruutvõrrandi:

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm 2}{6} \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{3} \text{ ja } t_2 = -1$$

1) Kui $t = -\frac{1}{3}$, siis

$$\frac{x}{x^2 + x - 5} = -\frac{1}{3},$$

millest pärast teisendusi saame ruutvõrrandi

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 5} = -2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ ja } x_2 = -5$$

2) Kui $t = -1$, siis

$$\frac{x}{x^2 + x - 5} = -1,$$

millest pärast teisendusi saame ruutvõrrandi

$$x^2 + 2x - 5 = 0 \quad x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1 + 5} = -1 \pm \sqrt{6} \Rightarrow x_3 = -1 + \sqrt{6} \text{ ja } x_4 = -1 - \sqrt{6}$$

Kontroll, kui $x = 1$.

$$vp = \frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = \frac{1^2 + 1 - 5}{1} + \frac{3 \cdot 1}{1^2 + 1 - 5} + 4 = -3 - 1 + 4 = 0$$

$$pp = 0$$

$$vp = pp$$

2.

Tõestus. Tähistame arvud x_i -ga, kus $i = 1; 2; \dots; 2012$. Olgu nende arvude summa S . Vastavalt ülesande tingimusele jagub $S - x_i$ iga indeksi i väärtuse korral arvuga 2012.

Näitame, et S jagub 2012-ga. Lähtume avaldisest, mis jagub arvuga 2012 (kõik liidetavad jaguvad 2012-ga):

$$(S - x_1) + (S - x_2) + \dots + (S - x_{2012}) = \underbrace{S + S + \dots + S}_{2012} - (x_1 + x_2 + \dots + x_{2012}) =$$
$$= 2012S - S = 2011S$$

Et esialgne avaldis jagub 2012-ga, siis peab ka $2011S$ jaguma 2012-ga. See on võimalik vaid siis, kui $S \div 2012$.

Järelikult ka $x_i = S - (S - x_i)$ jagub 2012-ga iga indeksi i väärtuse korral.

M. o. t. t.

3. Vastus: $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Lahendus. Tähistame ringjoone keskpunkti x -koordinaadi tähega c . Kuna keskpunkt asub sirgel $y=x$, siis on keskpunkti y -koordinaat samuti c .

Niisiis on selle ringjoone võrrand antud kujul $(x-c)^2 + (y-c)^2 = r^2$, kus r on ringjoone raadius. Kuna punktid $(5;0)$ ja $(1;8)$ peavad asuma ringjoonel, saame r ja c määramiseks võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} (5-c)^2 + (0-c)^2 = r^2 \\ (1-c)^2 + (8-c)^2 = r^2 \end{cases}$$

millest

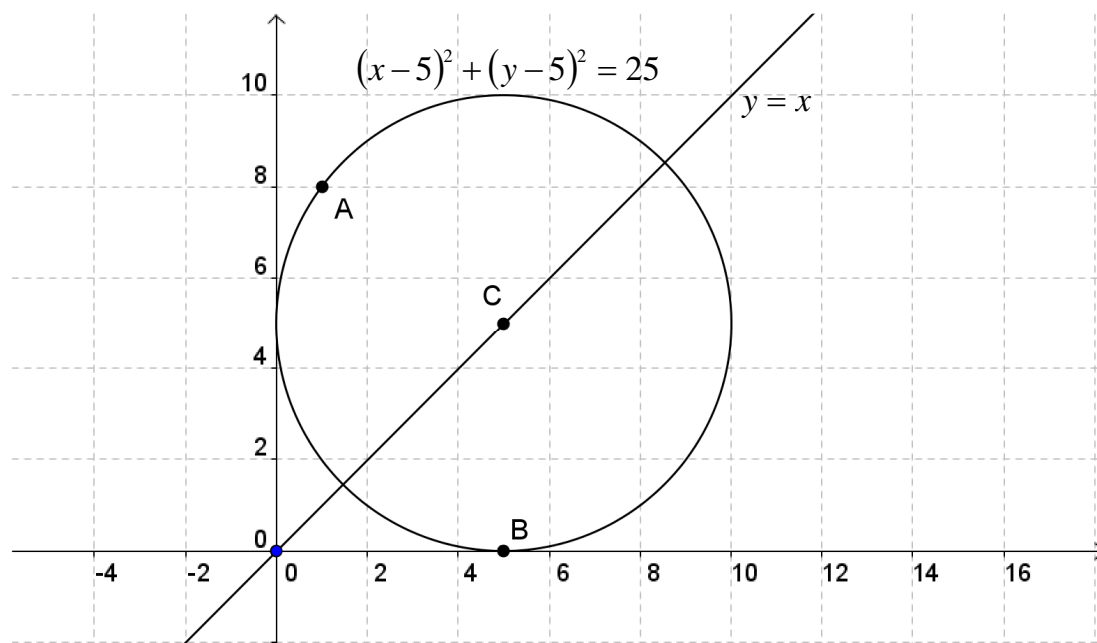
$$25 - 10c + c^2 + c^2 = 1 - 2c + c^2 + 64 - 16c + c^2$$

$$25 - 10c = 1 - 2c + 64 - 16c$$

$$8c = 40 \quad | :8$$

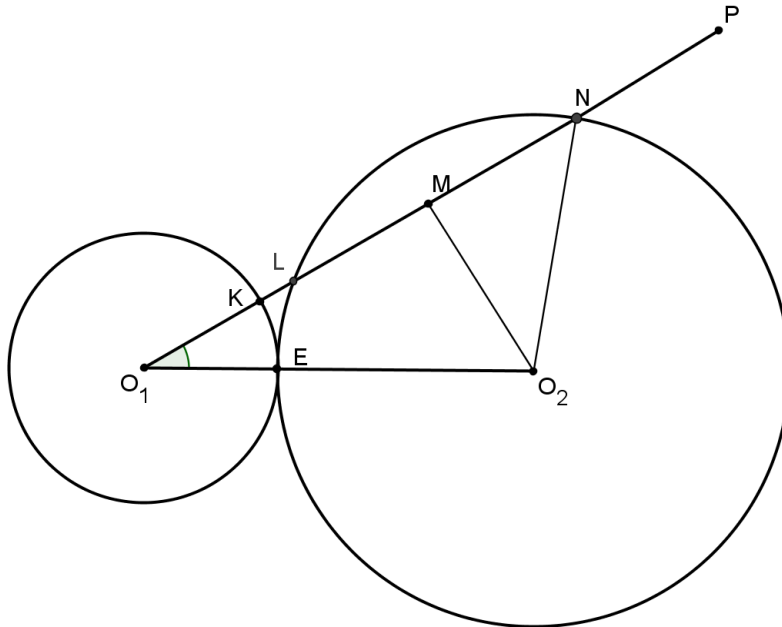
$$c = 5 \Rightarrow r^2 = (5-c)^2 + (0-c)^2 = 0^2 + (-5)^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

Niisiis on ringjoone võrrand $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$.



4. Vastus: $\frac{5-\sqrt{7}}{6}$.

Lahendus. Teeme abistava joonise. Väiksema ringi keskpunkti tähistame tähega O_1 ja suurema ringi keskpunkti tähega O_2 . Lõigaku sirglõik O_1P ringjooni punktides K , L ja N ($O_1N < 2,5r$). Ringjoonte lõikepunkt olgu E ning kõõlu LN keskpunkti tähistame tähega M .



1) Leiame lõigu O_2M pikkuse.

Et kolmnurk LO_2N on võrdhaarne kolmnurk haara pikkusega r , siis aluse keskpunkt on ka kõrguse aluspunktiks ning alus LN on risti kõrgusega MO_2 . Seega on kolmnurk O_1O_2M täisnurkne.

Saame:

$$\sin 30^\circ = \frac{|O_2M|}{|O_1O_2|} \Rightarrow |O_2M| = \frac{3}{2}r \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}r.$$

2) Leiame lõigu LN pikkuse.

Täisnurksest kolmnurgast LO_2M vastavalt Pythagorase teoreemile:

$$|LM| = \sqrt{|LO_2|^2 - |MO_2|^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{3}{4}r\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{9}{16}r^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}r.$$

Seega

$$|LN| = 2|LM| = \frac{\sqrt{7}}{2}r.$$

3) Leiame nõutud suhte.

$$\frac{|KL| + |NP|}{|O_1P|} = \frac{|O_1P| - |O_1K| - |LN|}{3r} = \frac{3r - \frac{1}{2}r - \frac{\sqrt{7}}{2}r}{3r} = \frac{5 - \sqrt{7}}{6}.$$

5. Vastus: 14.

Lahendus. Kuna iga valetaja (V) kõrval istub 1 valetaja, siis iga 2 valetajat istuvad kõrvuti ning nende kõrval istuvad need, kes räägivad tõtt (T). Niisiis näeb ahel valetaja juures alati välja järgmine: *TVVT*.

Seega need 8 inimest, kes ütlevad, et nende naabritest üks on valetaja, räägivad tõtt. Ehk kui üks naaber on valetaja, siis teine on tõerääkija.

Kuna keegi ei öelnud, et tema mõlemad naabrid on tõerääkijad, siis kolm inimest järjest ei saa olla tõerääkijad. Niisiis pole ahelas lüli *TTT*.

Seega istuvad 8 tõerääkijat valetajate kõrval ning nende juures näeb ahel välja järgmine: *VTTVVTTVVTTVVTTV*. Selles ahelas on kokku 16 inimest.

Kuna ülejäänud tõerääkijad ütlesid, et nende mõlemad naabrid on valetajad, siis arvestades, et $25 - 16 = 9$, siis tuleb eelnevale ahelale lisada kolm kolmikut kujul *VTV*.

Seega istuvad inimesed järgmiselt: *VTTVVTTVVTTVVTTVVTTVVTTV*. Selles ahelas on 14 valetajat.

HINDAMINE

1. Lahendust lihtsustava muutujavahetuse eest	2p
Tehniliselt õige lahenduse eest	3p
Täielikult õige eest vastuse eest	1p
Kontrolli eest	1p
	<hr/>
	7p
2. Kõikide arvud summa (S) käsitlemise eest	1p
Näidatud, et kõikide arvud summa (S) jagub 2012-ga, eest	4p
Tõestuse lõpuleviimise eest	2p
	<hr/>
	7p
3. Mõistmise, et keskpunkti koordinaadid on võrdsed, eest	1p
Õige võrrandisüsteemi koostamise eest	2p
Ringjoone võrrandi leidmise ja vastuse esitamise eest	2p
Joonise eest	2p
	<hr/>
	7p
4. Korrektse abijoonise eest	1p
Selgituse, et O_2M on kõõluga LN risti, eest	1p
Lõigu O_2M pikkuse leidmise eest	1p
Lõigu LN pikkuse leidmise eest	2p
Nõutud suhte leidmise eest	2p
	<hr/>
	7p
5. Näidatud, et valetajad istuvad paarikaupa kõrvuti ($TVVT$), eest	1p
Näidatud, et 8 tõerääkijat istuvad ahelas $VTTVVTTVVTTVVTTV$, eest	2p
Näidatud, et ülejäänud tõerääkijad moodustavad ahelaid VTV , eest	1p
Toodud näide lõplikust ahelast, eest	2p
Õige vastuse eest	1p
	<hr/>
	7p